

INDEKS RANDIĆ PADA GRAF NILPOTEN DARI GELANGGANG BILANGAN BULAT MODULO

Markus Togi Parlindungan¹, Sariyasa², Putu Kartika Dewi³

^{1,2,3} Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Pendidikan Ganesha

Corresponding e-mail: markus@undiksha.ac.id

Copyright © 2026 The Author



This is an open access article

Under the Creative Commons Attribution Share Alike 4.0 International License

DOI: [10.53866/jimi.v6i1.1191](https://doi.org/10.53866/jimi.v6i1.1191)

Abstrak

Indeks Randić merupakan salah satu indeks topologi dalam teori graf. Untuk suatu graf sederhana tak berarah G . Indeks Randić didefinisikan dengan rumus $R(G) = \sum_{(u,v) \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}}$, dengan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi graf G , serta $\deg(u)$ merupakan derajat simpul di simpul u dan $\deg(v)$ merupakan derajat simpul di simpul v . Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan nilai indeks Randić dan rumus umum pada gelanggang bilangan bulat modulo n untuk beberapa kasus n yaitu, n merupakan bilangan prima, n merupakan bilangan prima berpangkat, n merupakan perkalian dua bilangan prima dan n merupakan perkalian dua bilangan prima berpangkat. Hasil penelitian menunjukkan bahwa semakin besar bilangan prima pada suatu gelanggang bilangan bulat modulo n maka semakin besar nilai indeks Randić.

Kata Kunci: Indeks Randić, Graf Nilpoten, Gelanggang Bilangan Bulat Modulo

The Randić Index Of The Nilpotent Graph Of The Integers Modulo Ring

Abstract

The Randić index is one of topological indices in graph theory. For a simple undirected graph G , the Randić index is defined as $R(G) = \sum_{(u,v) \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}}$, where $E(G)$ denotes the edge set of G , $\deg(u)$ denotes the degree of vertex u and $\deg(v)$ denotes the degree of the vertex v . The aim of this study is to determine the values of the Randić index and to obtain general formulas for the nilpotent graph of the ring of integers modulo n for several cases namely, n is a prime number, n is a prime power, n is a product of two prime numbers, n is a product of two prime power number. The results of this study show that the structure of the nilpotent graph significantly affects the value of the Randić index, and in general the larger the prime numbers involved in \mathbb{Z}_n , the greater the resulting Randić index.

Keywords: Randić Index, Nilpotent Graph, The Ring Of Integers Modulo

1. Pendahuluan

Teori graf adalah salah satu studi dalam ilmu matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh matematikawan asal Swiss, Leonhard Euler, pada tahun 1736. Graf sering digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit pada matematika dengan tujuan membantu memvisualisasi suatu objek agar lebih mudah dimengerti. Sejak diperkenalkan melalui penyelesaian permasalahan jembatan Königsberg, teori graf telah memberikan kontribusi penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan praktis, antara lain masalah penjadwalan, penentuan rute terpendek, serta representasi struktur kimia (Safetra et al., 2026).

Syarifudin et al. (2023) menyatakan bahwa teori graf digunakan dalam struktur aljabar untuk menggambarkan suatu grup atau gelanggang sebagai sebuah graf, dengan anggotanya berperan sebagai simpul (*vertex*) sedangkan sisi-sisi (*edge*) antar simpul ditentukan oleh sifat-sifat dari grup atau gelanggang tersebut. Selain itu, Mansoori et al. (2016) memperkenalkan graf non-koprima sebagai komplemen dari graf

koprime. Adapun Alkadar et al. (2020) memperkenalkan graf koprime dari subgrup di grup simetri yang dimana $T(G)$ adalah graf koprime dari grup berhingga G , himpunan titik $T(G)$ semua unsur dari grup G dan dua simpul yang berbeda (x, y) di G dikatakan bertetangga jika dan hanya jika $\text{fpp}(|x|, |y|) = 1$. Selain itu, Firdausy et al. (2025) memperkenalkan bilangan kromatik graceful untuk graf $(D_{m,2} \times P_n)$. Selanjutnya, Nikmehr & Khojasteh (2013) memperkenalkan graf nilpoten dari suatu gelanggang.

Graf nilpoten dari suatu gelanggang didefinisikan sebagai graf yang simpul-simpulnya mempresentasikan seluruh elemen gelanggang dengan dua simpul terhubung oleh sebuah sisi jika dan hanya jika hasil perkalian kedua elemen yang bersesuaian dengan elemen nilpoten dalam gelanggang dan gelanggang bilangan bulat modulo n yang dilambangkan dengan Z_n adalah himpunan bilangan bulat $Z_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang didefinisikan secara modulo n sehingga elemen nilpoten dari suatu gelanggang adalah unsur yang dikalikan dengan dirinya sendiri secara berulang akan menghasilkan unsur nol (Malik et al., 2023).

Indeks topologi merupakan suatu metrik yang digunakan untuk merepresentasikan berbagai karakteristik struktural dari sebuah graf, seperti jarak antar simpul, derajat simpul, atau sifat-sifat khusus lainnya yang mencerminkan aspek topologis dari graf tersebut (Yatin et al., 2023). Terdapat peneliti telah mengkaji beberapa indeks topologi dari gelanggang bilangan bulat modulo n . Husni et al. (2024) melengkapi tentang Szeged Indeks dan Padmakar-Ivan Indeks dari graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo prima berpangkat.

Indeks Randić adalah indeks topologi yang ditemukan pada tahun 1975 oleh Milan Randić. Indeks ini banyak diteliti dan telah menjadi salah satu indeks topologi yang paling banyak digunakan dalam bidang kimia dan matematika khususnya dalam kajian teori graf. Indeks Randić didefinisikan dengan

$$\sum_{(u,v) \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}}$$

Beberapa penelitian terkait indeks Randić yang telah dilakukan. Alfain (2024) mengkaji tentang indeks Randić dan sum-connectivity indeks serta koindeks pada graf total dari ring komutatif bilangan bulat modulo. Sedangkan Abdurahim et al. (2025) mengkaji terkait indeks Randić dari graf koprime dari grup bilangan bulat modulo n . Pada artikel ini, penelitian indeks Randić dibagi menjadi beberapa kasus yaitu, gelanggang bilangan bulat modulo dengan p yang merupakan bilangan prima $\Gamma(Z_p)$, gelanggang bilangan bulat modulo dengan p^k yang merupakan bilangan prima berpangkat $\Gamma(Z_{p^k})$, gelanggang bilangan bulat modulo dengan pq yang merupakan perkalian dua bilangan prima $\Gamma(Z_{pq})$, gelanggang bilangan bulat modulo dengan $p^k q^l$ yang merupakan perkalian dua bilangan prima berpangkat $\Gamma(Z_{p^k q^l})$.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode deduktif-aksiomatik, yaitu metode yang berlandaskan pada aksioma, definisi dan teorema yang kemudian dikembangkan melalui penalaran logis secara deduktif untuk memperoleh kesimpulan yang bersifat umum. Metode ini digunakan untuk mengkaji secara sistematis indeks Randić pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo.

Penelitian ini dilakukan melalui studi pustaka dengan mengkaji berbagai sumber referensi yang relevan, seperti buku, jurnal ilmiah dan karya ilmiah lainnya yang berkaitan dengan teori graf, graf nilpoten, gelanggang bilangan bulat modulo dan indeks Randić. Penelitian diawali dengan mengkaji definisi yang kemudian dilanjutkan dengan contoh dan teorema. Berdasarkan teorema itu didapatkan rumus umum untuk mencari nilai indeks Randić pada beberapa kasus yaitu, kasus pada gelanggang bilangan bulat modulo dengan p merupakan bilangan prima ($\Gamma(Z_p)$), kasus pada gelanggang bilangan bulat modulo dengan p^k merupakan bilangan prima berpangkat ($\Gamma(Z_{p^k})$), kasus pada gelanggang bilangan bulat modulo dengan pq merupakan perkalian dua bilangan prima ($\Gamma(Z_{pq})$), kasus pada gelanggang bilangan bulat modulo dengan $p^k q^l$ merupakan bilangan prima berpangkat ($\Gamma(Z_{p^k q^l})$).

3. Hasil dan Pembahasan

Artikel ini menyajikan hasil penelitian yang diperoleh dari analisis indeks Randić pada graf nilpoten yang dibangun dari gelanggang bilangan bulat modulo n . Pembahasan diawali dengan kasus gelanggang bilangan bulat modulo dengan p yang merupakan bilangan prima $\Gamma(Z_p)$, gelanggang bilangan bulat modulo

dengan p^k yang merupakan bilangan prima berpangkat $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k})$, gelanggang bilangan bulat modulo dengan pq yang merupakan perkalian dua bilangan prima $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$, gelanggang bilangan bulat modulo dengan $p^k q^l$ yang merupakan perkalian dua bilangan prima berpangkat $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$. Sedangkan penentuan elemen nilpoten dan nilai indeks Randić yang bersesuaian dengan struktur graf yang terbentuk pada setiap kasus.

Definisi 2.1 Nikmehr & Khojasteh (2013) Untuk suatu gelanggang bilangan bulat R pada graf nilpoten yang dinotasikan $\Gamma(R)$ dengan himpunan simpulnya merupakan anggota dari R . Dua simpul $u, v \in R$ dikatakan bertetangga jika perkalian $uv \in N(R)$.

Definisi 2.2 Juliana, R. (2022) Untuk suatu gelanggang bilangan bulat R pada graf nilpoten yang dinotasikan $\Gamma(R)$ dengan himpunan simpulnya merupakan anggota dari R . Dua simpul $u, v \in R$ dikatakan bertetangga $uv \in N(R)$. Sehingga, himpunan gelanggang bilangan bulat modulo n adalah $\mathbb{Z}_n = \{1, 2, 3, \dots, n - 1\}$.

Definisi 2.3 Zhang, J., & Wu, B. (2022) Untuk indeks Randić merupakan salah satu indeks topologi yang pertama kali diperkenalkan oleh Milan Randić pada tahun 1975. Indeks Randić didefinisikan sebagai berikut.

$$R(G) = \sum_{(u,v) \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}}$$

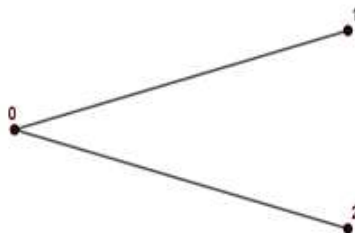
Dengan $\deg(u)$ dan $\deg(v)$ menyatakan derajat dari simpul u dan simpul v pada suatu graf G .

Teorema 2.1

Jika \mathbb{Z}_n adalah gelanggang bilangan bulat modulo n , dengan n merupakan bilangan prima maka $N(R) = \{0\}$. (Malik D.P. dkk., 2023)

Contoh 2.1

Gelanggang bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ pada graf nilpoten yang dinotasikan dengan $\Gamma(\mathbb{Z}_3)$. Maka indeks Randic dan graf nilpoten pada $\Gamma(\mathbb{Z}_3)$ sebagai berikut. (Malik D.P. dkk., 2023)



Gambar 1. Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_3)$

Berdasarkan gambar 1 diperoleh bahwa himpunan nilpoten \mathbb{Z}_3 adalah $N(\mathbb{Z}_3) = \{0\}$ dan himpunan nilpoten komplement dari \mathbb{Z}_3 adalah $N(\mathbb{Z}_3)^c = \{1, 2\}$. Berdasarkan gambar 1 juga diperoleh bahwa himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_3)$ bertetangga dengan himpunan komplement $N(\mathbb{Z}_3)^c$. Pada kasus \mathbb{Z}_3 himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_3)$ yang memiliki elemen 0 bertetangga dengan himpunan komplement $N(\mathbb{Z}_3)^c$ yang memiliki elemen 1 dan 2. Berikut ini tabel simpul dan derajat simpul pada kasus \mathbb{Z}_3

Tabel 1. Simpul dan derajat simpul pada kasus \mathbb{Z}_3

| Titik | Derajat Titik (<i>degree</i>) |
|-------|---------------------------------|
| 0 | 2 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |

Berdasarkan tabel 1 diperoleh bahwa simpul 0 bertetangga dengan simpul 1 dan 2 sehingga memiliki derajat simpul dua. Sedangkan, simpul 1 dan simpul 2 bertetangga dengan 0 sehingga memiliki derajat simpul satu. Pada kasus \mathbb{Z}_3 didapatkan satu-satunya kasus untuk mencari nilai indeks Randić yang dimana pasangan simpul (u,v) yaitu $u \in N(\mathbb{Z}_3)$ dan $v \in N(\mathbb{Z}_3)^c$ sebagai berikut.

Kasus I. Untuk $u \in N(\mathbb{Z}_3)$ dan $v \in N(\mathbb{Z}_3)^c$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{\deg(0) \deg(1)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{\deg(0) \deg(2)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Maka nilai indeks Randić pada $\Gamma(\mathbb{Z}_3)$ adalah $\Gamma(\mathbb{Z}_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Teorema 2.2

Jika \mathbb{Z}_p adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan p yang merupakan bilangan prima maka indeks Randić pada graf nilpoten dari \mathbb{Z}_p sebagai berikut.

$$\Gamma(\mathbb{Z}_n) = \sqrt{p-1}$$

Bukti. Berdasarkan teorema 2.1 gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_p memiliki himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_p) = \{0\}$ sehingga memiliki kardinalitas $|N(\mathbb{Z}_p)| = 1$ dan himpunan nilpoten komplemen $N(\mathbb{Z}_p)^c = \{1, 2, \dots, p-1\}$ sehingga memiliki kardinalitas $|N(\mathbb{Z}_p)^c| = p-1$. Dengan memperhatikan \mathbb{Z}_p bahwa $E = \{u, v\}$ dengan $u \in N(\mathbb{Z}_p)$ dan $v \in N(\mathbb{Z}_p)^c$ sehingga banyak pasangan simpul (u, v) adalah $p-1$ dikarenakan $|N(\mathbb{Z}_p)| \cdot |N(\mathbb{Z}_p)^c| = 1 \cdot (p-1) = p-1$. Sedangkan $\deg(u) = 1$ dan $\deg(v) = p-1$. Maka rumus indeks Randić dari gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_p sebagai berikut.

$$\begin{aligned} R(\Gamma(\mathbb{Z}_p)) &= \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_p), v \in N(\mathbb{Z}_p)^c} \frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}} = (p-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1(p-1)}} = \frac{p-1}{\sqrt{p-1}} \\ &= \frac{(p-1)\sqrt{p-1}}{p-1} = \sqrt{p-1} \end{aligned}$$

Sehingga dengan ini maka terbukti $R(\Gamma(\mathbb{Z}_p)) = \sqrt{p-1}$. ■

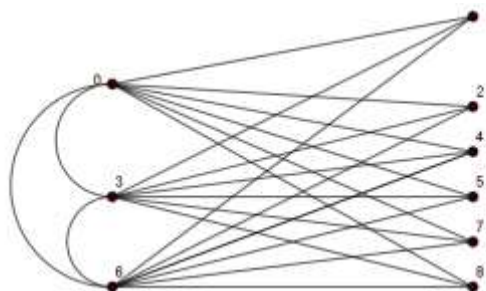
Teorema 2.3

Jika \mathbb{Z}_n adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan $n = p^k$ dimana $k \in \mathbb{N}$, maka

$$N(\mathbb{Z}_n) = \{0, 1p, 2p, 3p, \dots, (p^{k-1} - 1)p\}. \text{ (Malik D.P. dkk., 2023)}$$

Contoh 2.2

Gelanggang bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_{3^2} = \mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ pada graf nilpoten yang dinotasikan dengan $\Gamma(\mathbb{Z}_{3^2})$. Maka indeks Randić dan graf nilpoten pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{3^2})$ sebagai berikut.



Gambar 2. Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{3^2})$

Berdasarkan gambar 2 diperoleh bahwa himpunan nilpoten \mathbb{Z}_{3^2} adalah $N(\mathbb{Z}_{3^2}) = \{0, 3, 6\}$ dan himpunan nilpoten komplemen dari \mathbb{Z}_{3^2} adalah $N(\mathbb{Z}_{3^2})^c = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$. Berdasarkan gambar 2 juga diperoleh bahwa himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_{3^2})$ bertetangga dengan himpunan komplemen $N(\mathbb{Z}_{3^2})^c$ dan

himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_{3^2})$ bertetangga dengan dirinya sendiri. Berikut ini tabel simpul dan derajat simpul pada kasus \mathbb{Z}_{3^2} .

Tabel 1. Simpul dan derajat simpul pada kasus \mathbb{Z}_{3^2}

| Titik | Derajat titik (<i>degree</i>) |
|-------|---------------------------------|
| 0 | 8 |
| 1 | 3 |
| 2 | 3 |
| 3 | 8 |
| 4 | 3 |
| 5 | 3 |
| 6 | 8 |
| 7 | 3 |
| 8 | 3 |

Berdasarkan tabel 1 diperoleh bahwa himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_{3^2})$ bertetangga dengan himpunan nilpoten komplement $N(\mathbb{Z}_{3^2})^c$ dan antar elemen nilpoten saling bertetangga, sehingga memiliki derajat simpul delapan. Sedangkan, himpunan nilpoten komplement $N(\mathbb{Z}_{3^2})^c$ bertetangga dengan himpunan nilpoten, sehingga memiliki derajat simpul tiga. Pada kasus \mathbb{Z}_{3^2} didapatkan dua kasus untuk mencari nilai indeks Randić sebagai berikut.

Kasus I. Untuk $u \in N(\mathbb{Z}_{3^2})$ dan $v \in N(\mathbb{Z}_{3^2})^c$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(1)}} = \frac{1}{\sqrt{8 \times 3}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(2)}} = \frac{1}{\sqrt{8 \times 3}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(3)\deg(1)}} = \frac{1}{\sqrt{8 \times 3}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

:

:

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(6)\deg(8)}} = \frac{1}{\sqrt{8 \times 3}} = \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{24} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{12} + \frac{\sqrt{6}}{12} + \frac{\sqrt{6}}{12} + \dots + \frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

Kasus II. Untuk $u \in N(\mathbb{Z}_{3^2})$ dan $v \in N(\mathbb{Z}_{3^2})^c$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(3)}} = \frac{1}{\sqrt{8 \times 8}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(6)}} = \frac{1}{\sqrt{8 \times 8}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(6)}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Hasil dari kedua kasus tersebut dijumlahkan maka didapatkan nilai indeks Randić pada kasus $\Gamma(\mathbb{Z}_{3^2})$

sebagai berikut.

$$R(\Gamma(\mathbb{Z}_{3^2})) = \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{3^2}), v \in N(\mathbb{Z}_{3^2})^c} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} + \sum_{u, v \in N(\mathbb{Z}_{3^2})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} = \frac{3}{2}\sqrt{6} + \frac{3}{8} = \frac{3+12\sqrt{6}}{8}$$

$$\text{Maka nilai dari } R(\Gamma(\mathbb{Z}_{3^2})) = \frac{3+12\sqrt{6}}{8}$$

Teorema 2.4

Jika \mathbb{Z}_{p^k} adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan p^k yang merupakan bilangan prima berpangkat maka indeks Randić pada graf nilpoten dari \mathbb{Z}_{p^k} sebagai berikut.

$$R(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k})) = \left(\frac{(p^{2k-1} - p^{2k-2})\sqrt{p^{2k-1} - p^{k-1}}}{p^{2k-1} - p^{k-1}} \right) + \left(C_2^{p^{k-1}} \cdot \frac{1}{p^{k-1}} \right)$$

Bukti. Berdasarkan teorema 2.3 gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_{p^k} memiliki himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_{p^k}) = \{0, 1p, 2p, 3p, \dots, (p^{k-1} - 1)p\}$ sehingga memiliki kardinalitas $|N(\mathbb{Z}_{p^k})| = \frac{p^k}{p} = p^{k-1}$ dan himpunan nilpoten komplemen $N(\mathbb{Z}_{p^k})^c = \{1, 2, \dots, p^k - 1\}$ sehingga memiliki kardinalitas $|N(\mathbb{Z}_{p^k})^c| = p^k - p^{k-1}$. Untuk menghitung indeks Randić dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k})$ dibagi menjadi dua partisi, yaitu $N(\mathbb{Z}_{p^k})$ dan $N(\mathbb{Z}_{p^k})^c$. Oleh karena itu terdapat dua kasus yang harus diperhatikan sebagai berikut.

Kasus I. Untuk $u \in N(\mathbb{Z}_{p^k})$ dan $v \in N(\mathbb{Z}_{p^k})^c$

Banyak pasangan (u, v) yang sesuai dengan kasus I adalah

$|N(\mathbb{Z}_{p^k})| \cdot |N(\mathbb{Z}_{p^k})^c| = p^{k-1} \cdot (p^k - p^{k-1}) = p^{2k-1} - p^{2k-2}$. Sedangkan $\deg(u) = p^k - 1$ dan $\deg(v) = p^{k-1}$ sehingga

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{(p^k-1)p^{k-1}}} = \frac{\sqrt{p^{2k-1}-p^{k-1}}}{p^{2k-1}-p^{k-1}}$$

Kasus II. Untuk $u \in N(\mathbb{Z}_{p^k})$ dan $v \in N(\mathbb{Z}_{p^k})$

Banyak pasangan (u, v) yang sesuai dengan kasus II adalah

$|N(\mathbb{Z}_{p^k})| \cdot |N(\mathbb{Z}_{p^k})| = C_2^{|N(\mathbb{Z}_{p^k})|} = C_2^{p^{k-1}}$. Sedangkan $\deg(u) = p^k - 1$ dan $\deg(v) = p^k - 1$ sehingga

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{(p^k-1)(p^k-1)}} = \frac{1}{p^k-1}$$

Maka rumus indeks Randić dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k})$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} R(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k})) &= \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{p^k}), v \in N(\mathbb{Z}_{p^k})^c} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} + C_2^{p^{k-1}} \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{p^k}), v \in N(\mathbb{Z}_{p^k})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} \\ &= \left((p^{2k-1} - p^{2k-2}) \cdot \frac{\sqrt{p^{2k-1}-p^{k-1}}}{p^{2k-1}-p^{k-1}} \right) + \left(C_2^{p^{k-1}} \cdot \frac{1}{p^k-1} \right) \end{aligned}$$

Sehingga dengan ini maka terbukti

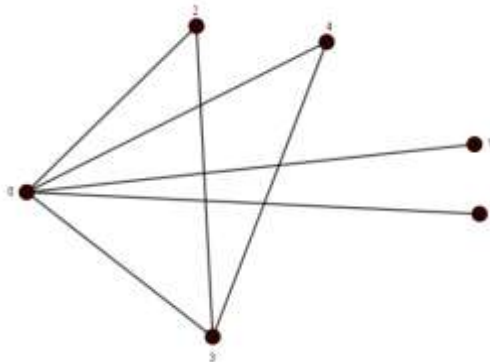
$$R(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k})) = \left((p^{2k-1} - p^{2k-2}) \cdot \frac{\sqrt{p^{2k-1}-p^{k-1}}}{p^{2k-1}-p^{k-1}} \right) + \left(C_2^{p^{k-1}} \cdot \frac{1}{p^k-1} \right) \blacksquare$$

Teorema 2.5

Jika \mathbb{Z}_n adalah gelanggang bilangan bulat modulo dari perkalian dua buah bilangan prima p dan q dengan $n = p \cdot q$ maka $N(\mathbb{Z}_n) = \{0\}$. (Malik D.P. dkk., 2023)

Contoh 2.3

Gelanggang bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_{2.3} = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ pada graf nilpoten yang dinotasikan dengan $\Gamma(\mathbb{Z}_{2.3})$. Maka indeks Randic dan graf nilpoten pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{2.3})$ sebagai berikut.



Gambar 3. Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{2.3})$

Berdasarkan gambar 3 diperoleh bahwa himpunan nilpoten $\mathbb{Z}_{2.3}$ adalah $N(\mathbb{Z}_{2.3}) = \{0\}$ dan himpunan gabungan dari subgrup siklik dua dan tiga yang bukan elemen nilpoten dari $\mathbb{Z}_{2.3}$ adalah

$(\langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle)^c = \{1, 5\}$. Pada kasus $\mathbb{Z}_{2.3}$ terdapat dua himpunan yang saling terhubung pada graf nilpoten yaitu, $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ dan $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$. $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ adalah himpunan nilpoten pada subgrup siklik $\langle 2 \rangle$ di $\mathbb{Z}_{2.3}$ yang bukan merupakan elemen nilpoten. $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ adalah himpunan nilpoten pada subgrup siklik $\langle 3 \rangle$ di $\mathbb{Z}_{2.3}$ yang bukan merupakan elemen nilpoten. Elemen himpunan dari $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ adalah $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3}) = \{2, 4\}$ dan elemen himpunan dari $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ adalah $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3}) = \{3\}$.

Tabel 3. Simpul dan derajat simpul pada kasus $\mathbb{Z}_{2.3}$

| Titik | Derajat titik (<i>degree</i>) |
|-------|---------------------------------|
| 0 | 5 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |

Berdasarkan tabel 3 diperoleh bahwa himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_{2.3})$ bertetangga dengan $(\langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle)^c$, $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ dan $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ sehingga memiliki derajat simpul lima. Sedangkan, himpunan gabungan dari subgrup siklik dua dan tiga yang bukan elemen nilpoten $(\langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle)^c$ bertetangga dengan himpunan $N(\mathbb{Z}_{2.3})$, $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ dan $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ sehingga memiliki derajat simpul satu. Sedangkan, himpunan elemen pada subgrup siklik $\langle 2 \rangle$ di $\mathbb{Z}_{2.3}$ yang bukan merupakan elemen nilpoten $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ bertetangga dengan $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ dan $N(\mathbb{Z}_{2.3})$ sehingga memiliki derajat simpul dua. Sedangkan elemen pada subgrup siklik $\langle 3 \rangle$ di $\mathbb{Z}_{2.3}$ yang bukan merupakan elemen nilpoten $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ bertetangga dengan $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2.3})$ dan $N(\mathbb{Z}_{2.3})$ sehingga memiliki derajat simpul tiga. Pada kasus $\mathbb{Z}_{2.3}$ didapatkan empat kasus untuk mencari nilai indeks Randić sebagai berikut.

Kasus I. Untuk $u \in N(\mathbb{Z}_{2,3})$ dan $v \in \langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2,3})$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(2)}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(4)}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Kasus II. Untuk $u \in N(\mathbb{Z}_{2,3})$ dan $v \in (\langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle)^c$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(1)}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(5)}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Kasus III. Untuk $u \in N(\mathbb{Z}_{2,3})$ dan $v \in \langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2,3})$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(3)}} = \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Kasus IV. Untuk $u \in \langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2,3})$ dan $v \in \langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2,3})$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(2)\deg(3)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(4)\deg(3)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Hasil dari keempat kasus tersebut dijumlahkan maka didapatkan nilai Indeks Randić pada kasus gelanggang bulat modulo $\mathbb{Z}_{2,3}$.

$$\begin{aligned} R(\Gamma(\mathbb{Z}_{2,3})) &= \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{2,3}), v \in \langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2,3})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} + \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{2,3}), v \in (\mathbb{Z}_{2,3})^c} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} \\ &+ \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{2,3}), v \in \langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2,3})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} + \sum_{u \in \langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2,3}), v \in \langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2,3})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{15}}{15} + \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{10} + 6\sqrt{5} + \sqrt{15} + 5\sqrt{6}}{15} \end{aligned}$$

$$\text{Maka nilai dari } R(\Gamma(\mathbb{Z}_{2,3})) = \frac{3\sqrt{10} + 6\sqrt{5} + \sqrt{15} + 5\sqrt{6}}{15}$$

Teorema 2.6

Jika \mathbb{Z}_{pq} adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan pq yang merupakan perkalian dua bilangan prima maka indeks Randić pada graf nilpoten dari \mathbb{Z}_{pq} sebagai berikut.

$$\begin{aligned} R(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})) &= \frac{q - 1\sqrt{p^2q - p}}{p^2q - p} + \frac{(pq - q - p + 1)\sqrt{pq - 1}}{pq - 1} + \frac{p - 1\sqrt{pq^2 - q}}{pq^2 - q} \\ &+ \frac{(pq - p - q + 1)\sqrt{pq}}{pq} \end{aligned}$$

Bukti. Berdasarkan teorema 2.5 gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_{pq} memiliki himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_{pq}) = \{0\}$ sehingga memiliki kardinalitas $|N(\mathbb{Z}_{pq})| = 1$. Sedangkan himpunan elemen pada

subgrup siklik $\langle p \rangle$ di \mathbb{Z}_{pq} yang bukan merupakan elemen nilpoten adalah

$\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq}) = \{p, 2p, 3p, \dots, p(q-1)\}$ sehingga memiliki kardinalitas

$|\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| = \frac{pq}{p} - 1 = q - 1$ dan himpunan elemen pada subgrup siklik $\langle q \rangle$ di \mathbb{Z}_{pq} yang bukan merupakan elemen nilpoten adalah $\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq}) = \{q, 2q, 3q, \dots, q(p-1)\}$ sehingga memiliki kardinalitas $|\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| = \frac{pq}{q} - 1 = p - 1$. Sedangkan himpunan gabungan dari subgrup siklik p dan q yang bukan elemen nilpoten dari \mathbb{Z}_{pq} adalah $(\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c = \{1, 2, 3, \dots, pq-1\}$ sehingga memiliki kardinalitas $|(\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c| = (pq) - 1 - (q-1) - (p-1) = pq - q - p + 1$. Untuk menghitung indeks Randić dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ dibagi menjadi empat partisi, yaitu $N(\mathbb{Z}_{pq})$, $\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$, $\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $(\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c$. Oleh karena itu terdapat empat kasus yang harus diperhatikan sebagai berikut.

Kasus I. Untuk $u \in N(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $v \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$

Banyak pasangan (u, v) yang sesuai dengan kasus I adalah

$$|N(\mathbb{Z}_{pq})| \cdot |\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| = 1 \cdot (q-1) = q-1.$$

Sedangkan $\deg(u) = pq-1$ dan $\deg(v) = p$ sehingga

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{(pq-1)p}} = \frac{\sqrt{p^2q-p}}{p^2q-p}$$

Kasus II. Untuk $u \in N(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $v \in (\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c$

Banyak pasangan (u, v) yang sesuai dengan kasus II adalah

$$|N(\mathbb{Z}_{pq})| \cdot |(\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c| = 1 \cdot (pq-1-q+1-p+1) = pq-q-p+1$$

Sedangkan $\deg(u) = pq-1$ dan $\deg(v) = 1$ sehingga

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{(pq-1) \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{pq-1}} = \frac{\sqrt{pq-1}}{pq-1}$$

Kasus III. Untuk $u \in N(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $v \in \langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$

Banyak pasangan (u, v) yang sesuai dengan kasus III adalah

$$|N(\mathbb{Z}_{pq})| \cdot |\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| = 1 \cdot (p-1) = p-1$$

Sedangkan $\deg(u) = pq-1$ dan $\deg(v) = q$ sehingga

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{(pq-1) \cdot q}} = \frac{\sqrt{pq-1}}{pq-1}$$

Kasus IV. Untuk $u \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$ dan $v \in \langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})$

Banyak pasangan (u, v) yang sesuai dengan kasus IV adalah

$$|\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| \cdot |\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})| = (q-1) \cdot (p-1) = pq-p-q+1$$

Sedangkan $\deg(u) = p$ dan $\deg(v) = q$ sehingga

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{pq}} = \frac{\sqrt{pq}}{pq}$$

Maka rumus indeks Randić dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ sebagai berikut.

$$R(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})) = \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{pq}), v \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} + \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{pq}), v \in (\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{pq}), v \in (q) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}} \\
 & + \sum_{u \in (p) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq}), v \in (q) \setminus N(\mathbb{Z}_{pq})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}} \\
 & = \frac{q-1\sqrt{p^2q-p}}{\sqrt{p^2q-p}} + \frac{(pq-q-p+1)\sqrt{pq-1}}{pq-1} + \frac{p-1\sqrt{pq^2-q}}{pq^2-q} + \frac{(pq-p-q+1)\sqrt{pq}}{pq}
 \end{aligned}$$

Sehingga dengan ini maka terbukti

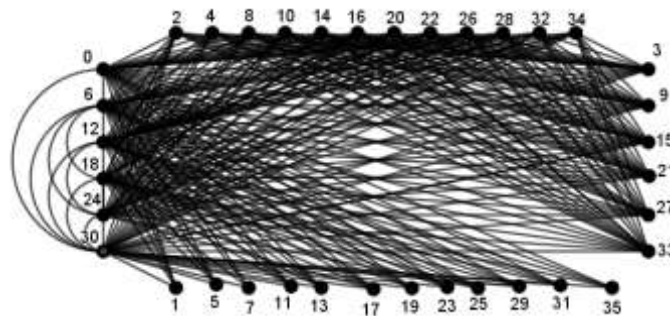
$$R(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})) = \frac{q-1\sqrt{p^2q-p}}{\sqrt{p^2q-p}} + \frac{(pq-q-p+1)\sqrt{pq-1}}{pq-1} + \frac{p-1\sqrt{pq^2-q}}{pq^2-q} + \frac{(pq-p-q+1)\sqrt{pq}}{pq} \blacksquare$$

Teorema 2.7

Jika \mathbb{Z}_n adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan $n = p^k q^l$ dimana $k, l \in \mathbb{N}$ maka $N(\mathbb{Z}_{p^k q^l}) = \{0, 1pq, 2pq, \dots, ((p^{k-1} q^{l-1} - 1)pq)\}$. (Malik D.P. dkk., 2023)

Contoh 2.4

Gelanggang bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2} = \mathbb{Z}_{36} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 35\}$ pada graf nilpoten yang dinotasikan dengan $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2})$. Maka indeks Randic dan graf nilpoten pada $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2})$ sebagai berikut.



Gambar 4. Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2})$

Berdasarkan gambar 4 diperoleh bahwa himpunan nilpoten $\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2}$ adalah

$N(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2}) = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$ dan himpunan gabungan dari subgrup siklik dua dan tiga yang bukan elemen nilpoten dari $\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2}$ adalah $(\langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle)^c = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}$. Pada kasus $\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2}$ terdapat dua himpunan yang saling terhubung pada graf nilpoten yaitu, $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2})$ dan $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2})$. $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2})$ adalah himpunan nilpoten pada subgrup siklik $\langle 2 \rangle$ di $\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2}$ yang bukan merupakan elemen nilpoten. $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2})$ adalah himpunan nilpoten pada subgrup siklik $\langle 3 \rangle$ di $\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2}$ yang bukan merupakan elemen nilpoten. Elemen himpunan dari $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2})$ adalah $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2}) = \{2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32, 34\}$ dan elemen himpunan dari $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2})$ adalah $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2}) = \{3, 9, 15, 21, 27, 33\}$.

Tabel 4. Simpul dan derajat simpul pada kasus $\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2}$

| Titik | Derajat titik (degree) |
|----------------------------------|------------------------|
| 0,6,12,18,24,30 | 35 |
| 2,4,8,10,14,16,20,22,26,28,32,34 | 12 |
| 3,9,15,21,27,33 | 18 |
| 1,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35 | 6 |

Berdasarkan tabel 4 diperoleh bahwa himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ bertetangga dengan $(\langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle)^c$, $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ dan $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ sehingga memiliki derajat simpul tiga puluh lima. Sedangkan, himpunan gabungan dari subgrup siklik dua dan tiga yang bukan elemen nilpoten $(\langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle)^c$ bertetangga dengan himpunan $N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$, $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ dan $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ sehingga memiliki derajat simpul enam. Sedangkan, himpunan elemen pada subgrup siklik $\langle 2 \rangle$ di $\mathbb{Z}_{2^2,3^2}$ yang bukan merupakan elemen nilpoten $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ bertetangga dengan $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ dan $N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ sehingga memiliki derajat simpul dua belas. Sedangkan elemen pada subgrup siklik $\langle 3 \rangle$ di $\mathbb{Z}_{2^2,3^2}$ yang bukan merupakan elemen nilpoten $\langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ bertetangga dengan $\langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ dan $N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ sehingga memiliki derajat simpul delapan belas. Pada kasus $\mathbb{Z}_{2^2,3^2}$ didapatkan lima kasus untuk mencari nilai indeks Randić sebagai berikut.

Kasus I. Jika $u \in N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ dan $v \in (\langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle)^c$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(1)}} = \frac{1}{\sqrt{35.6}} = \frac{1}{\sqrt{210}} = \frac{\sqrt{210}}{210}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(5)}} = \frac{1}{\sqrt{35.6}} = \frac{1}{\sqrt{210}} = \frac{\sqrt{210}}{210}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(7)}} = \frac{1}{\sqrt{35.6}} = \frac{1}{\sqrt{210}} = \frac{\sqrt{210}}{210}$$

:

:

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(30)\deg(35)}} = \frac{1}{\sqrt{35.6}} = \frac{1}{\sqrt{210}} = \frac{\sqrt{210}}{210}$$

$$\frac{\sqrt{210}}{210} + \frac{\sqrt{210}}{210} + \frac{\sqrt{210}}{210} + \dots + \frac{\sqrt{210}}{210} = 72 \cdot \frac{\sqrt{210}}{210} = \frac{12}{35} \sqrt{210}$$

Kasus II. Jika $u \in N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ dan $v \in \langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(2)}} = \frac{1}{\sqrt{35.12}} = \frac{1}{\sqrt{420}} = \frac{\sqrt{420}}{420} = \frac{2\sqrt{105}}{420} = \frac{\sqrt{105}}{210}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(4)}} = \frac{1}{\sqrt{35.12}} = \frac{1}{\sqrt{420}} = \frac{\sqrt{420}}{420} = \frac{2\sqrt{105}}{420} = \frac{\sqrt{105}}{210}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(8)}} = \frac{1}{\sqrt{35.12}} = \frac{1}{\sqrt{420}} = \frac{\sqrt{420}}{420} = \frac{2\sqrt{105}}{420} = \frac{\sqrt{105}}{210}$$

:

:

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(30)\deg(34)}} = \frac{1}{\sqrt{35.12}} = \frac{1}{\sqrt{420}} = \frac{\sqrt{420}}{420} = \frac{2\sqrt{105}}{420} = \frac{\sqrt{105}}{210}$$

$$\frac{\sqrt{105}}{210} + \frac{\sqrt{105}}{210} + \frac{\sqrt{105}}{210} + \dots + \frac{\sqrt{105}}{210} = 72 \cdot \frac{\sqrt{105}}{210} = \frac{12}{35} \sqrt{105}$$

Kasus III. Jika $u \in N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ dan $v \in \langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(3)}} = \frac{1}{\sqrt{35.18}} = \frac{1}{\sqrt{630}} = \frac{\sqrt{630}}{630} = \frac{3\sqrt{70}}{630} = \frac{\sqrt{70}}{210}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(9)}} = \frac{1}{\sqrt{35.18}} = \frac{1}{\sqrt{630}} = \frac{\sqrt{630}}{630} = \frac{3\sqrt{70}}{630} = \frac{\sqrt{70}}{210}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(15)}} = \frac{1}{\sqrt{35.18}} = \frac{1}{\sqrt{630}} = \frac{\sqrt{630}}{630} = \frac{3\sqrt{70}}{630} = \frac{\sqrt{70}}{210}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(21)}} = \frac{1}{\sqrt{35.18}} = \frac{1}{\sqrt{630}} = \frac{\sqrt{630}}{630} = \frac{3\sqrt{70}}{630} = \frac{\sqrt{70}}{210}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(27)}} = \frac{1}{\sqrt{35.18}} = \frac{1}{\sqrt{630}} = \frac{\sqrt{630}}{630} = \frac{3\sqrt{70}}{630} = \frac{\sqrt{70}}{210}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(33)}} = \frac{1}{\sqrt{35.18}} = \frac{1}{\sqrt{630}} = \frac{\sqrt{630}}{630} = \frac{3\sqrt{70}}{630} = \frac{\sqrt{70}}{210}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(6)\deg(3)}} = \frac{1}{\sqrt{35.18}} = \frac{1}{\sqrt{630}} = \frac{\sqrt{630}}{630} = \frac{3\sqrt{70}}{630} = \frac{\sqrt{70}}{210}$$

:
:

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(30)\deg(33)}} = \frac{1}{\sqrt{35.18}} = \frac{1}{\sqrt{630}} = \frac{\sqrt{630}}{630} = \frac{3\sqrt{70}}{630} = \frac{\sqrt{70}}{210}$$

$$\frac{\sqrt{70}}{210} + \frac{\sqrt{70}}{210} + \frac{\sqrt{70}}{210} + \dots + \frac{\sqrt{70}}{210} = 36 \cdot \frac{\sqrt{70}}{210} = \frac{6}{35}\sqrt{70}$$

Kasus IV. Jika $u \in \langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$ dan $v \in \langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(2)\deg(3)}} = \frac{1}{\sqrt{12.18}} = \frac{1}{\sqrt{216}} = \frac{\sqrt{216}}{216} = \frac{6\sqrt{6}}{216} = \frac{1}{36}\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(2)\deg(9)}} = \frac{1}{\sqrt{12.18}} = \frac{1}{\sqrt{216}} = \frac{\sqrt{216}}{216} = \frac{6\sqrt{6}}{216} = \frac{1}{36}\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(2)\deg(15)}} = \frac{1}{\sqrt{12.18}} = \frac{1}{\sqrt{216}} = \frac{\sqrt{216}}{216} = \frac{6\sqrt{6}}{216} = \frac{1}{36}\sqrt{6}$$

:
:

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(34)\deg(33)}} = \frac{1}{\sqrt{12.18}} = \frac{1}{\sqrt{216}} = \frac{\sqrt{216}}{216} = \frac{6\sqrt{6}}{216} = \frac{1}{36}\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{36}\sqrt{6} + \frac{1}{36}\sqrt{6} + \frac{1}{36}\sqrt{6} + \dots + \frac{1}{36}\sqrt{6} = 72 \cdot \frac{1}{36}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Kasus V. Jika $u, v \in N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(6)}} = \frac{1}{\sqrt{35.35}} = \frac{1}{35}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(12)}} = \frac{1}{\sqrt{35.35}} = \frac{1}{35}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(0)\deg(18)}} = \frac{1}{\sqrt{35.35}} = \frac{1}{35}$$

:
:

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(24)\deg(30)}} = \frac{1}{\sqrt{35.35}} = \frac{1}{35}$$

$$\frac{1}{35} + \frac{1}{35} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{35} = 15 \cdot \frac{1}{35} = \frac{3}{7}$$

Hasil dari kelima kasus tersebut dijumlahkan maka didapatkan nilai Indeks Randić pada kasus gelanggang bulat modulo $\mathbb{Z}_{2^2,3^2}$.

$$\begin{aligned} R(\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})) &= \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2}), v \in (\langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle)^c} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} + \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2}), v \in \langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} \\ &+ \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2}), v \in \langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} + \sum_{u \in \langle 2 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2}), v \in \langle 3 \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{2^2,3^2})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{u,v \in N(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} \\
 & = \frac{12}{35} \sqrt{210} + \frac{12}{35} \sqrt{105} + \frac{6}{35} \sqrt{70} + 2\sqrt{6} + \frac{3}{7} \\
 & = \frac{12\sqrt{210} + 12\sqrt{105} + 6\sqrt{70} + 15}{35}
 \end{aligned}$$

Maka nilai dari $R(\Gamma(\mathbb{Z}_{2^2 \cdot 3^2})) = \frac{3\sqrt{10} + 6\sqrt{5} + \sqrt{15} + 5\sqrt{6}}{15}$

Teorema 2.8

Jika $\mathbb{Z}_{p^k q^l}$ adalah gelanggang bilangan bulat modulo dengan $p^k q^l$ yang merupakan perkalian dua bilangan prima berpangkat maka indeks Randić pada graf nilpoten dari $\mathbb{Z}_{p^k q^l}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 R(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k q^l})) & = \frac{p^{k-1} q^{l-1} (p-1)(q-1)}{p^k q^l - 1} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1} - p^{k-1} q^{l-1}} \\
 & + \frac{p^{k-2} q^{l-1} (q-1)}{p^k q^l - 1} \sqrt{p^{2k} q^{2l-1} - p^k q^{l-1}} \\
 & + \frac{p^k q^{l-2} - p^{k-1} q^{l-2}}{p^k q^l - 1} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l} - p^{k-1} q^l} \\
 & + \frac{pq - q - p + 1}{pq} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1}} \\
 & + C_2^{p^{k-1} q^{l-1}} \cdot \frac{1}{(p^k q^l - 1)}
 \end{aligned}$$

Bukti. Berdasarkan teorema 2.7 gelanggang bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_{p^k q^l}$ memiliki himpunan nilpoten $N(\mathbb{Z}_{p^k q^l}) = \{0, 1pq, 2pq, \dots, ((p^{k-1} q^{l-1} - 1)pq)\}$ sehingga memiliki kardinalitas

$|N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})| = p^{k-1} q^{l-1}$. Sedangkan himpunan elemen pada subgrup siklik $\langle p \rangle$ di $\mathbb{Z}_{p^k q^l}$ yang bukan merupakan elemen nilpoten adalah $\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l}) = \{p, 2p, 3p, \dots, (p^k q^l - p)\}$ sehingga memiliki kardinalitas $|\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})| = \frac{p^k q^l}{p} - p^{k-1} q^{l-1} = p^{k-1} q^l - p^{k-1} q^{l-1}$ dan himpunan elemen pada subgrup siklik $\langle q \rangle$ di $\mathbb{Z}_{p^k q^l}$ yang bukan merupakan elemen nilpoten adalah

$\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l}) = \{q, 2q, 3q, \dots, (p^k q^l - q)\}$ sehingga memiliki kardinalitas

$|\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})| = \frac{p^k q^l}{q} - p^{k-1} q^{l-1} = p^k q^{l-1} - p^{k-1} q^{l-1}$. Sedangkan himpunan gabungan dari subgrup siklik p dan q yang bukan elemen nilpoten dari $\mathbb{Z}_{p^k q^l}$ adalah

$(\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c = \{1, 2, 3, \dots, p^k q^l - 1\}$ sehingga memiliki kardinalitas

$|(\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c| = p^k q^l - p^{k-1} q^{l-1} - p^{k-1} q^l + p^{k-1} q^{l-1} - p^k q^{l-1} + p^{k-1} q^{l-1}$. Untuk menghitung indeks Randić dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$ dibagi menjadi empat partisi, yaitu $N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$, $\langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$,

$\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$ dan $(\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c$. Oleh karena itu terdapat lima kasus yang harus diperhatikan sebagai berikut.

Kasus I. Jika $u \in N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$ dan $v \in (\langle p \rangle \cup \langle q \rangle)^c$

Banyak pasangan (u, v) yang sesuai dengan kasus I adalah

$$|N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})| \cdot |(\mathbb{Z}_{p^k q^l})^c| = (p^{k-1} q^{l-1}) \cdot (p^k q^l - p^{k-1} q^{l-1} - p^{k-1} q^l + p^{k-1} q^{l-1} - p^k q^{l-1} + p^{k-1} q^{l-1})$$

$$= p^{2k-1}q^{2l-1} - p^{2k-2}q^{2l-2} - p^{2k-2}q^{2l-1} \\ + p^{2k-2}q^{2l-2} - p^{2k-1}q^{2l-2} + p^{2k-2}q^{2l-2}$$

Sedangkan $\deg(u) = p^k q^l - 1$ dan $\deg(v) = p^{k-1} q^{l-1}$ sehingga

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{(p^k q^l - 1) p^{k-1} q^{l-1}}} = \frac{1}{\sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1} - p^{k-1} q^{l-1}}} \\ = \frac{1}{\sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1} - p^{k-1} q^{l-1}}} = \frac{\sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1} - p^{k-1} q^{l-1}}}{p^{2k-1} q^{2l-1} - p^{k-1} q^{l-1}}$$

Kasus II. Jika $u \in N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$ dan $v \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$

Banyak pasangan (u, v) yang sesuai dengan kasus II adalah

$$|N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})| \cdot |\langle p \rangle / N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})| = (p^{k-1} q^{l-1}) \cdot (p^{k-1} q^l - p^{k-1} q^{l-1}) \\ = p^{2k-2} q^{2l-1} - p^{2k-2} q^{2l-2}$$

Sedangkan $\deg(u) = p^k q^l - 1$ dan $\deg(v) = p^k q^{l-1}$ sehingga

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{(p^k q^l - 1) p^k q^{l-1}}} = \frac{1}{\sqrt{p^{2k} q^{2l-1} - p^k q^{l-1}}} = \frac{\sqrt{p^{2k} q^{2l-1} - p^k q^{l-1}}}{p^{2k} q^{2l-1} - p^k q^{l-1}}$$

Kasus III. Jika $u \in N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$ dan $v \in \langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$

Banyak pasangan (u, v) yang sesuai dengan kasus III adalah

$$|N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})| \cdot |\langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})| = (p^{k-1} q^{l-1}) \cdot (p^k q^{l-1} - p^{k-1} q^{l-1}) \\ = p^{2k-1} q^{2l-2} - p^{2k-2} q^{2l-2}$$

Sedangkan $\deg(u) = p^k q^l - 1$ dan $\deg(v) = p^{k-1} q^l$ sehingga

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{(p^k q^l - 1) p^{k-1} q^l}} = \frac{1}{\sqrt{p^{2k-1} q^{2l} - p^{k-1} q^l}} = \frac{\sqrt{p^{2k-1} q^{2l} - p^{k-1} q^l}}{p^{2k-1} q^{2l} - p^{k-1} q^l}$$

Kasus IV. Jika $u \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$ dan $v \in \langle q \rangle N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$

Banyak pasangan (u, v) yang sesuai dengan kasus IV adalah

$$|\langle p \rangle / N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})| \cdot |\langle q \rangle / N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})| = (p^{k-1} q^l - p^{k-1} q^{l-1}) \\ \cdot (p^k q^{l-1} - p^{k-1} q^{l-1}) \\ = p^{2k-1} q^{2l-1} - p^{2k-2} q^{2l-1} \\ - p^{2k-1} q^{2l-2} + p^{2k-2} q^{2l-2}$$

Sedangkan $\deg(u) = p^k q^{l-1}$ dan $\deg(v) = p^{k-1} q^l$ sehingga

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{p^k q^{l-1} p^{k-1} q^l}} = \frac{1}{\sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1}}} = \frac{\sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1}}}{p^{2k-1} q^{2l-1}}$$

Kasus V. Jika $u, v \in N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$

Banyak pasangan (u, v) yang sesuai dengan kasus V adalah

$$C_2^{N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})} = C_2^{p^{k-1} q^{l-1}}. \text{ Sedangkan } \deg(u) = \deg(v) = p^k q^l - 1 \text{ dan sehingga}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} = \frac{1}{\sqrt{(p^k q^{l-1})(p^k q^{l-1})}} = \frac{1}{(p^k q^{l-1})}$$

Maka rumus indeks Randić dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k q^l})$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} R(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k q^l})) &= \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{p^k q^l}), v \in \langle p \rangle \cup \langle q \rangle^c} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} + \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{p^k q^l}), v \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} \\ &+ \sum_{u \in N(\mathbb{Z}_{p^k q^l}), v \in \langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} + \sum_{u \in \langle p \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l}), v \in \langle q \rangle \setminus N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} \\ &+ \sum_{u, v \in N(\mathbb{Z}_{p^k q^l})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u)\deg(v)}} \\ &= \frac{p^{k-1} q^{l-1} (p-1)(q-1)}{p^k q^{l-1}} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1} - p^{k-1} q^{l-1}} + \frac{p^{k-2} q^{l-1} (q-1)}{p^k q^{l-1}} \sqrt{p^{2k} q^{2l-1} - p^k q^{l-1}} \\ &+ \frac{p^k q^{l-2} - p^{k-1} q^{l-2}}{p^k q^{l-1}} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l} - p^{k-1} q^l} + \frac{pq - q - p + 1}{pq} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1}} + C_2^{p^{k-1} q^{l-1}} \frac{1}{(p^k q^{l-1})} \end{aligned}$$

Sehingga dengan ini maka terbukti

$$\begin{aligned} R(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k q^l})) &= \frac{p^{k-1} q^{l-1} (p-1)(q-1)}{p^k q^{l-1}} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1} - p^{k-1} q^{l-1}} + \frac{p^{k-2} q^{l-1} (q-1)}{p^k q^{l-1}} \sqrt{p^{2k} q^{2l-1} - p^k q^{l-1}} \\ &+ \frac{p^k q^{l-2} - p^{k-1} q^{l-2}}{p^k q^{l-1}} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l} - p^{k-1} q^l} + \frac{pq - q - p + 1}{pq} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1}} + C_2^{p^{k-1} q^{l-1}} \frac{1}{(p^k q^{l-1})} \end{aligned}$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, nilai indeks Randic pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo berhasil ditentukan untuk berbagai bentuk berhasil dihitung untuk berbagai bentuk n , yaitu bilangan prima, prima berpangkat, perkalian dua bilangan prima dan perkalian dua bilangan prima berpangkat.

1. Untuk bilangan prima maka rumus indeks Randic dari \mathbb{Z}_p sebagai berikut.

$$R(\mathbb{Z}_p) = \sqrt{p-1}$$

2. Untuk bilangan prima berpangkat maka rumus indeks Randic dari \mathbb{Z}_{p^k} sebagai berikut.

$$R(\mathbb{Z}_{p^k}) = \left(\frac{(p^{2k-1} - p^{2k-2}) \sqrt{p^{2k-1} - p^{k-1}}}{p^{2k-1} - p^{k-1}} \right) + \left(C_2^{p^{k-1}} \cdot \frac{1}{p^{k-1}} \right)$$

3. Untuk perkalian dua bilangan prima maka rumus indeks Randic dari \mathbb{Z}_{pq} sebagai berikut.

$$\begin{aligned} R(\mathbb{Z}_{pq}) &= \frac{q-1\sqrt{p^2q-p}}{p^2q-p} + \frac{(pq-q-p+1)\sqrt{(pq-1)}}{pq-1} + \frac{p-1\sqrt{pq^2-q}}{pq^2-q} \\ &+ \frac{(pq-p-q+1)\sqrt{pq}}{pq} \end{aligned}$$

4. Untuk perkalian dua bilangan prima berpangkat maka rumus indeks Randic dari $\mathbb{Z}_{p^k q^l}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} R(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^k q^l})) &= \frac{p^{k-1} q^{l-1} (p-1)(q-1)}{p^k q^{l-1}} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1} - p^{k-1} q^{l-1}} \\ &+ \frac{p^{k-2} q^{l-1} (q-1)}{p^k q^{l-1}} \sqrt{p^{2k} q^{2l-1} - p^k q^{l-1}} \\ &+ \frac{p^k q^{l-2} - p^{k-1} q^{l-2}}{p^k q^{l-1}} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l} - p^{k-1} q^l} \\ &+ \frac{pq - q - p + 1}{pq} \sqrt{p^{2k-1} q^{2l-1}} \\ &+ C_2^{p^{k-1} q^{l-1}} \frac{1}{(p^k q^{l-1})} \end{aligned}$$

Pada artikel ini telah dikaji indeks Randić pada graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo \mathbb{Z}_n . Penelitian difokuskan pada penentuan nilai indeks Randić dan perolehan rumus umum untuk beberapa bentuk n , yaitu n bilangan prima, n bilangan prima berpangkat, n merupakan perkalian dua bilangan prima, serta n merupakan perkalian dua bilangan prima berpangkat. Hasil kajian menunjukkan bahwa struktur graf nilpoten dari \mathbb{Z}_n sangat memengaruhi nilai indeks Randić yang dihasilkan. Untuk setiap bentuk n , diperoleh rumus eksplisit indeks Randić yang ditentukan oleh pola keterhubungan dan derajat simpul pada graf nilpoten yang bersesuaian. Secara umum, semakin besar bilangan prima yang terlibat dalam struktur \mathbb{Z}_n , maka semakin besar pula nilai indeks Randić yang diperoleh. Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi dasar bagi pengembangan kajian indeks topologi lainnya pada graf-graf aljabar yang dibangun dari struktur gelanggang atau struktur aljabar lainnya.

Bibliografi.

- Safetra, M. F. C., Desviona, N., Helmina, H., Rianti, A., & Prayogi, M. R. (2026). Penerapan teori graf dalam kehidupan sehari-hari. *Algoritma: Jurnal Matematika, Ilmu Pengetahuan Alam, Kebumihan dan Angkasa*, 4(1), 52–68. <https://doi.org/10.62383/algoritma.v4i1.923>
- Syarifudin, A. G., Santi, L. M., Faradiyah, A. R., Wijaya, V. R., & Suwastika, E. (2023). Topological indices of the relative coprime graph of the dihedral group. *JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika)*, 7(3), 698–711. <https://doi.org/10.31764/jtam.v7i3.14913>
- Mansoori, F., Erfanian, A., & Tolue, B. (2016). Non-coprime graph of a finite group. *AIP Conference Proceedings*, 1750(1), 050017. <https://doi.org/10.1063/1.4954605>
- Alkadar, R., Yanita, Y., & Wellyyanti, D. (2021). Graf koprima dari subgrup di grup simetri. *Jurnal Matematika UNAND*, 10(1), 93–98.
- Firdausy, A. N., Dewi, P. K., Sudiarta, I. G. P., & Silalahi, R. Y. (2024). Bilangan kromatik graceful graf $D_{m,2} \times P_n$. *Jurnal Matematika*, 14(3), 595–599.
- Nikmehr, M. J., & Khojasteh, S. (2013). On the nilpotent graph of a ring. *Turkish Journal of Mathematics*, 37(4), 553–559. <https://doi.org/10.3906/mat-1112-35>
- Malik, D.P., Wardhana, I.G.A.W., Dewi, P.K., Widiastuti, R.S., Maulana, F., Syarifudin, A.G., & Awanis, Y.Z. (2023). Graf Nilpoten dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima. *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 8(1), 28-33. <https://dx.doi.org/10.26594/jmpm.v8i1.2920>.
- Yatin, B. Z., Gayatri, M. R., Wardhana, I. G. A. W., & Prayanti, B. D. A. (2023). Indeks Hyper-Wiener dan Indeks Padmakar-Ivan dari Graf Koprima dari Grup Dihedral. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*, 7(2), 138-147. <https://doi.org/10.26740/jram.v7n2.p138-147>
- Husni, M. N., Wardhana, I. G. A. W., Dewi, P. K., & Suparta, I. N. (2024). Indeks Szeged dan Indeks Padmakar-Ivan pada Graf Nilpoten pada Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, 20(2), 332–339. <https://doi.org/10.20956/j.v20i2.31418>
- Alfain, M. J. (2024). Randić, Sum-Connectivity Indeks dan Koindeks pada Graf Total dari Ring Komutatif Bilangan Bulat Modulo. *Skripsi, Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang*.
- Abdurahim, A., Qudsi, J., Muawanah, S., & Salwa, S. (2025). Indeks Harmonik, Randić, dan Gutman dari Graf Koprima Prima untuk Grup Bilangan Bulat Modulo. *Jurnal Diferensial*, 7(1), 38–46. <https://doi.org/10.35508/jd.v7i1.18227>
- Juliana, R. (2022). Karakteristik Graf Pembagi Nol pada Gelanggang Bilangan Bulat Modulo. *Fraktal: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 3(2), 1–8. <https://ejournal.undana.ac.id/fraktal>.
- Zhang, J., & Wu, B. (2022). Randić Index of a Line Graph. *Axioms*, 11(5), 210. <https://doi.org/10.3390/axioms11050210>.